ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 517.95:004.94

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ХРИСТОВА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Представлены методика и компьютерный алгоритм применения системы ортонормированных на всей действительной оси функций Христова, замкнутых относительно умножения и дифференцирования. Приведены примеры расчетов, выполненных в среде пакета Mathematica.

Ключевые слова: моделирование, дифференциальное уравнение в частных производных, приближенное аналитическое решение, ортонормированные функции, функции Христова.

Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (ДУвЧП) второго и более высоких порядков (нелинейные

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019), а также Минобразования и науки России (Задание № 2014/153).

уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях [1]. Эти уравнения в замкнутой форме могут быть решены редко: действительно, нечасто могут быть получены точные решения ДУвЧП, которые выражаются через явные и легко вычислимые математические соотношения. Почти всегда приходится прибегать к соответствующим численным методам, областью действия которых является приближение точной дифференциальной модели и, следовательно, точного решения [2].

Обычно под точными (или аналитическими) решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются решения [1], которые представляются: а) через элементарные функции; б) через решения линейных уравнений с частными производными или линейных интегральных уравнений; в) в виде квадратур; г) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). С другой стороны, к приближенным аналитическим решениям ДУвЧП относят аппроксимации решений, представляемые: а) рядами по соответствующим системам функций (ортонормированным, собственным и др.); б) их конечными отрезками с точными или приближенными коэффициентами; в) результатами конечного числа циклов в итерационных процедурах (типа метода последовательных приближений) и др.

Многие уравнения современной математической физики и, в том числе, гидромеханики, волной динамики и др. относятся к множеству эволюционных систем с полиномиальными нелинейностями. Среди них можно отметить уравнения Гинзбурга–Ландау (или процесса нелинейного горения), Бюргерса, Кордевега–де Фриза (классическое, модифицированное, высших порядков), колебаний нелинейной струны в проблеме Ферми–Пасты–Улама, Курамото–Сивашинского, Фишера, Буссинеска, мелкой воды, Максвелла–Блоха, Клейна–Гордона, регуляризированное длинноволновое, Ламе, типа Гамильтона–Якоби, Хироты, трехмерного трехволнового резонансного взаимодействия, распространения звука в газе, Свифта–Хоэнберга, Колмогорова–Петровского–Пискунова и др.

При этом для приближенного аналитического построения решений таких уравнений в неограниченных областях требуются ортонормированные системы функций, во-первых, достаточно быстро убывающие при стремлении аргумента к бесконечности, а вовторых, замкнутые относительно операций умножения и дифференцирования. Но проблема в том, что среди хорошо известных таковые отсутствуют. Например, единственная классическая система ортонормированных на всей действительной оси функций Эрмита [4] обладает первым свойством и не имеет второго. Заметим, что широко рекламируемые и используемые в последнее время вейвлеты [5] для рассматриваемой области сводятся к тем же функциям Эрмита при соответствующем линейном преобразовании аргумента (а ряды по ним – это одна из форм рядов Фурье), а следовательно, при их применении, как и первых, при приближении квадратов и парных (а при необходимости и тройных, четверных и т.д) произведений этих функций требуется дополнительное переразложение в функциональные ряды по ним же [6], что не улучшает условия работы с ними.

Интересным семейством функций, обладающих указанными выше свойствами, является малоизвестная система функций Христова [7], которая и используется ниже для аппроксимации решений ДУвЧП. Альтернативные такие же нечасто встречающиеся в научной литературе семейства функций Хиггинса и Бойда можно найти в работах [8] и [9,10].

1. Система функций Христова

В качестве базисных в рамках данного исследования будем использовать функции, предложенные в работе [7]. Соотношения для функций Христова выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{2k-1}\,(-1)^{n+k}\,\mathrm{C}_{2n+1}^{2k-1}}{(x^2+1)^{n+1}}, \\ C_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{2k-2}\,(-1)^{n+k+1}\,\mathrm{C}_{2n+1}^{2k-2}}{(x^2+1)^{n+1}}, \end{aligned} \qquad n \geqslant 0. \tag{1}$$

Исследуя свойства этих функций, можно заметить, что рассматриваемая система состоит из двух подпоследовательностей, образованных из нечетных $\{S_n(x)\}$ и четных $\{C_n(x)\}$ функций и ведущих себя на бесконечности как $1/x$ и $1/x^2$ соответственно. Более того, эта система является ортонормированной и полной в пространстве $\mathbb{L}^2(-\infty,+\infty)$ [7], а ее замкнутость относительно операций умножения и дифференцирования следует из следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}'_n &= \frac{1}{2}\big[n\,\widetilde{C}_{n-1} - (2n+1)\,\widetilde{C}_n + (n+1)\,\widetilde{C}_{n+1}\big],\\
\widetilde{C}'_n &= -\frac{1}{2}\big[n\,\widetilde{S}_{n-1} - (2n+1)\,\widetilde{S}_n + (n+1)\,\widetilde{S}_{n+1}\big],\\
x\,\widetilde{S}'_n &= \frac{1}{2}\big[n\,\widetilde{S}_{n-1} - \widetilde{S}_n - (n+1)\,\widetilde{S}_{n+1}\big],\\
x\,\widetilde{C}'_n &= \frac{1}{2}\big[n\,\widetilde{C}_{n-1} - \widetilde{C}_n - (n+1)\,\widetilde{C}_{n+1}\big],\\
\widetilde{S}_n\,\widetilde{S}_k &= \frac{1}{4}\big[\widetilde{C}_{n+k+1} - \widetilde{C}_{n+k} + \widetilde{C}_{n-k} - \widetilde{C}_{n-k-1}\big],\\
\widetilde{C}_n\,\widetilde{C}_k &= \frac{1}{4}\big[-\widetilde{C}_{n+k+1} + \widetilde{C}_{n+k} + \widetilde{C}_{n-k} - \widetilde{C}_{n-k-1}\big],\\
\widetilde{S}_n\,\widetilde{C}_k &= \frac{1}{4}\big[-\widetilde{S}_{n+k+1} + \widetilde{S}_{n+k} + \widetilde{S}_{n-k} - \widetilde{S}_{n-k-1}\big],\\
\widetilde{S}_n^2 &= \frac{1}{4}\,\big[\widetilde{C}_{2n+1} - \widetilde{C}_{2n} + 2\,\widetilde{C}_0\big],\\
\widetilde{C}_n^2 &= \frac{1}{4}\,\big[-\widetilde{C}_{2n+1} + \widetilde{C}_{2n} + 2\,\widetilde{C}_0\big],\\
\widetilde{S}_{-n} &= \widetilde{S}_{n-1}, \qquad \widetilde{C}_{-n} = -\widetilde{C}_{n-1},\\
S_n &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widetilde{S}_n, \qquad C_n \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widetilde{C}_n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Назовем, вид функций (1) "классическим" (по аналогии с классическими полиномами). Но применение соотношений (1), (2) может встретить такие же трудности, как и использование классических функций Эрмита [11], которые, как и рассматриваемые, ортонормальны на всей действительной оси. А именно, их линейная комбинация, состоящая из относительно небольшого числа слагаемых (с переменными коэффициентами), достаточно хорошо приближает исследуемую характеристику явления (массу, концентрацию вещества и т.д.), если "форма" этой характеристики не претерпевает существенных изменений за период исследования. В противном случае качество аппроксимации быстро падает.

Для случая функций Эрмита (например, в задаче о приближенном вычислении плотности вероятности [12]) был найден выход в использовании "стандартизованных" функций, имеющих аргумент вида $x = [y - a(t)]/s(t)$ (с соответствующим усложнением в многомерном случае), где $a(t)$ и $s(t)$ – функции, отслеживающие сдвиг и изменение формы и выбираемые из каких-либо соображений (например, получаемые в процессе параллельных расчетов, причем для плотности вероятности функции $a(t)$ и $s(t)$ – математическое ожидание и стандарт распределения).

Если теперь обратиться к функциям Христова и их свойствам, то из равенств (2) легко сделать вывод, что техника использования "стандартизованного" варианта возможна и здесь, причем, например, при изучении движения волн в качестве $a(t)$ можно выбирать их фазовую или групповую скорость.

Перечисленные выше свойства, а также дополнительные замечания показывают пригодность системы функций (1), (2) для вычисления приближенных аналитических решений уравнений типа ДУвЧП.

2. Общая схема исследования

Рассмотрим систему ДУвЧП следующего вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., t\big) \tag{3}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

где $t > t_0$ – время; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор–строка пространственных переменных; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \{u_1(\boldsymbol{x},t), u_2(\boldsymbol{x},t), ..., u_m(\boldsymbol{x},t)\}^\top$ – вектор–столбец состояния; $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, ..., f_m\}^\top$ – вектор–столбец нелинейных функций с нелинейностями в форме многочленов компонент вектора $\boldsymbol{u}$ и их производных по пространственным координатам с зависящими от t коэффициентами; $\top$ – символ транспонирования.

Предполагая, что решение системы уравнений (3) интегрируемо с квадратом по пространственным переменным, будем искать это решение в виде разложения

$$\widehat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\alpha_1=0}^{+\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{+\infty}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{+\infty}\boldsymbol{u}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(t)\,\varphi_{\alpha_1}(x_1)\,\varphi_{\alpha_2}(x_2)\dots\varphi_{\alpha_n}(x_n)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{+\infty}\boldsymbol{u}_\alpha(t)\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}), \quad (5)$$

где $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_1,,\dots,\alpha_n\}$ – мультиндекс ($\alpha_i\geqslant 0$);

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\widetilde{S}_\ell(x), & k=2\,\ell,\\ \widetilde{C}_\ell(x), & k=2\,\ell+1.\end{cases} \quad (6)$$

Счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для коэффициентов разложения $\boldsymbol{u}_\alpha(t)$ может быть получена на основе метода Фаэдо–Галеркина [13] следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\alpha(t)}{dt}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),\dots,t\big)\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \quad (7)$$

При этом начальные условия для функций $\boldsymbol{u}_\alpha(t)$ будут определяться условиями

$$\boldsymbol{u}_\alpha(t_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \quad (8)$$

На этапе практической реализации данной схемы необходимо ограничиться конечной частью системы (7) и соотношений (8), т.е. аппроксимация решения будет представлена в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\alpha=0}^{M}\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha(t)\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}), \quad (9)$$

где $M=\{M_1,M_1,,\dots,M_n\}$ – мультиндекс.

Несложно установить, что в общем и даже в огромном большинстве частных случаев получить уравнения для $\boldsymbol{u}_\alpha(t)$ в явном виде не представляется возможным: их прямое построение затруднено вследствие сложности и громоздкости промежуточных выкладок, что не позволяет выписать замкнутый вид необходимых для численных расчетов правых частей системы ОДУ относительно коэффициентов разложения. Это приводит к необходимости компьютерной автоматизации генерирования таких уравнений (построению на компьютере символьных представлений правых частей этих уравнений при любом разумном M) на основе применения современных систем аналитических вычислений [14].

3. Алгоритм реализации

Компьютерная реализация алгоритма осуществлялась в среде пакета Mathematica [15]. Это объясняется значительными преимуществами, которыми по сравнению с конкурентами обладает этот пакет в плане организации среды подстановок пользователя. Дело в том, что использование таких подстановок для решения поставленной задачи особенно эффективно с точки зрения программирования и наглядно с общематематической позиции. Например, соотношения для $S'_n(x)$ и $S_n(x)S_k(x)$ (2) на входном языке пакета Mathematica могут быть записаны так:

```
Derivative[1, 0][SS][x_, n_] := (n CC[x, n - 1] -
   (2 n + 1) CC[x, n] + (n + 1) CC[x, n + 1])/2;
Times[SS[x_, n_], SS[x_, k_]] := (CC[x, n + k + 1] -
   CC[x, n + k] + CC[x, n - k] - CC[x, n - k - 1])/4;
```

где $S_n(x)$ и $C_n(x)$ обозначены как `SS[x,n]` и `CC[x,n]` соответственно.

При решении избранных примеров (см. раздел 4) использовалась следующая схема:

1°. Формирование подстановок пользователя.

2°. Генерирование заданного количества базисных функций.

3°. Вычисление коэффициентов разложения функций $\boldsymbol{u}_{0\alpha}(\boldsymbol{x})$ по базисным функциям.

4°. Построение ОДУ для функций $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha(t)$ с помощью подстановки отрезка ряда (9) в соответствующую систему ДУвЧП вместо вектора $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, приведение подобных и приравнивание коэффициентов в левой и правой частях полученного равенства при одинаковых базисных функциях.

5°. Формирование начальных условий.

6°. Численное интегрирование построенных ОДУ с учетом сгенерированных начальных условий.

7°. Визуализация результатов расчетов.

4. Примеры

Начнем с классической задачи математической физики, удобной для демонстрации используемых методики и алгоритма:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{10}$$

$$u(x,0) \equiv u_0(x) = \begin{cases} |1-x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Приближенное аналитическое решение задачи (10), (11) вычислялось при $M = 82$ (в качестве базисных использовались функции $S_k(x)$ и $C_k(x)$ для $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 40$). Его изменение со временем изображено на рис. 1.

Как известно, точное решение задачи (10), (11) дается частным случаем формулы Даламбера [16]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0(x - a\,t) + u_0(x + a\,t)\big]. \tag{12}$$

При этом полученное приближенное аналитическое решение несущественно отклоняется от точного (12).

Рассмотрим обобщенное нелинейное дифференциальное уравнение Курамото–Сивашинского [17]. Стандартное уравнение такого типа описывает процессы стекания жидкости по наклонной плоскости, горения и термокапиллярной конвекции в тонких слоях жидкости и др. Приближенное аналитическое решение ($M = 50$) вычислялось для следующей формы уравнения Курамото–Сивашинского: [17]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + 0{,}45\,\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 6\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0{,}5\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{13}$$

где $u = u(x,t)$, с начальным условием

$$u(x,0) \equiv u_0(x) = \frac{2\,x}{48\,x^2 + 3}. \tag{14}$$

Поведение этого решения отображено на рис. 2.

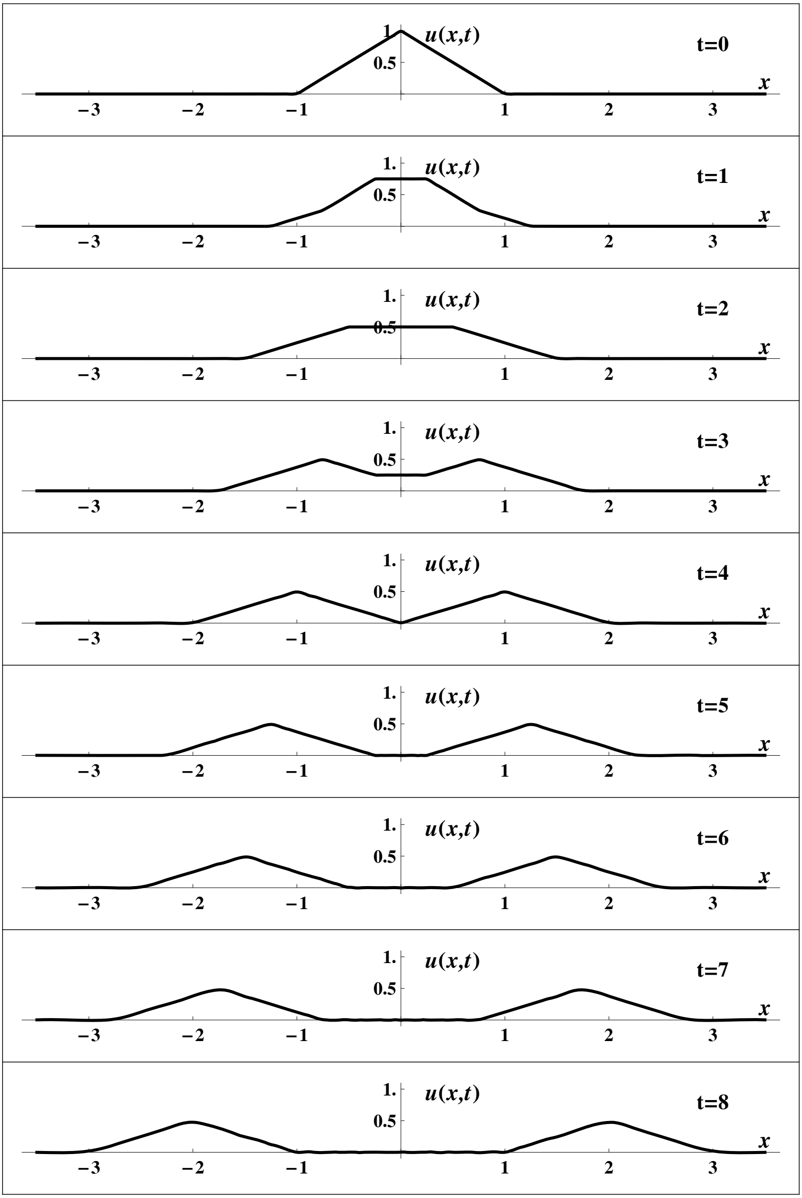

Рис.1

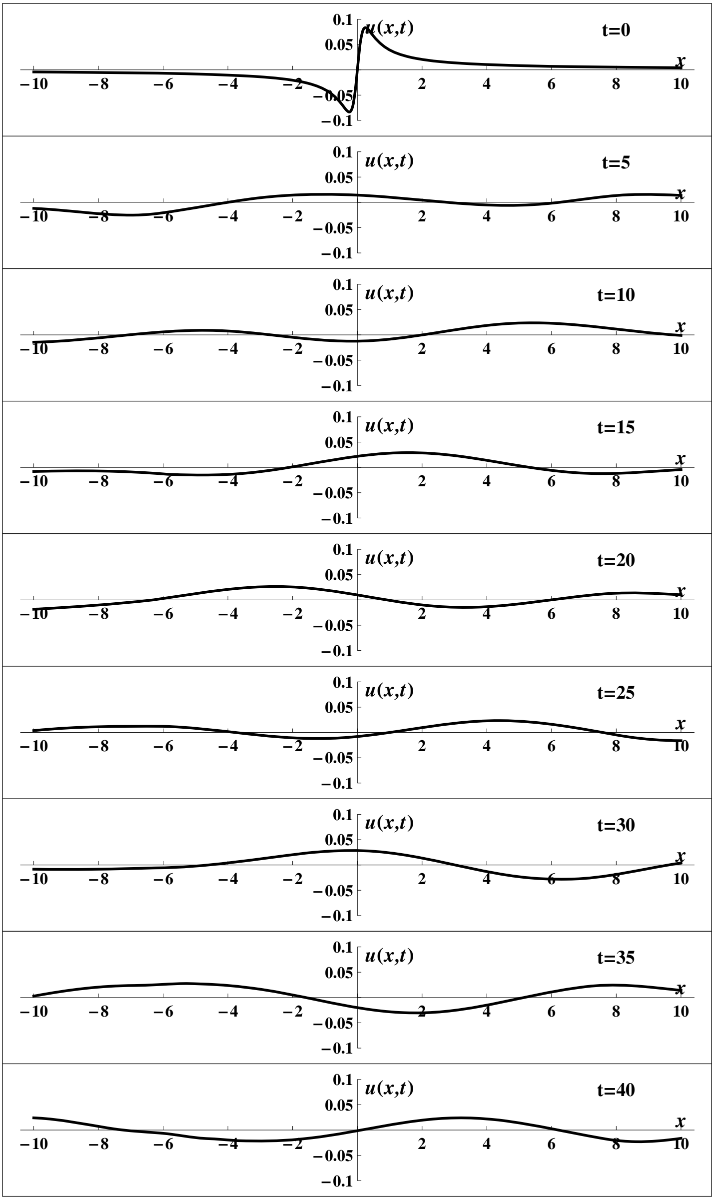

Рис.2

Последний пример – одномерная система кинетической теории газов, описываемая системой уравнений Карлемана [18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\left(v^2 - u^2\right), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\alpha\left(v^2 - u^2\right), \tag{15}$$

где $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, $\alpha = \text{const}$ ($|\alpha| < 1$), с начальными условиями

$$u(x,0) \equiv u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{-5\,x + 10\,x^3 - x^5}{4\,(1+x^2)^3}, \tag{16}$$

$$v(x,0) \equiv v_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1 - 10\,x^2 + 5\,x^4}{4\,(1+x^2)^3}. \tag{17}$$

Система Карлемана является одной из модельных систем кинетической теории газов, состоящих из одноатомных молекул, имеющих конечное число скоростей, в общем случае описываемых дискретным кинетическим уравнением Больцмана [19]. В этом случае одномерный газ состоит из двух типов частиц, имеющих равные по модулю и противоположно направленные скорости. Исследуемая система является квазилинейной системой гиперболических уравнений.

Результаты расчетов для $M = 60$ (всего было построено 244 ОДУ) и $\alpha = 0{,}05$ демонстрируются на рис. 3, где профили $u(x,t)$ изображены непрерывными линиями, $v(x,t)$ – штриховыми.

Заключение

Численное интегрирование сгенерированных систем ОДУ осуществлялось стандартными средствами пакета Mathematica (функция NDSolve) без дополнительной настройки. Но необходимо заметить, что несмотря на осуществимость решения подобных задач в рамках системы Mathematica в полном объеме, специфика систем аналитических вычислений может приводить к существенному увеличению затрат времени ЦП на численные расчеты, а следовательно, потребуется генерирование программ, реализующих построенные правые части ОДУ, для вычислений в среде стандартных языков численного программирования (C, Fortran, Pascal).

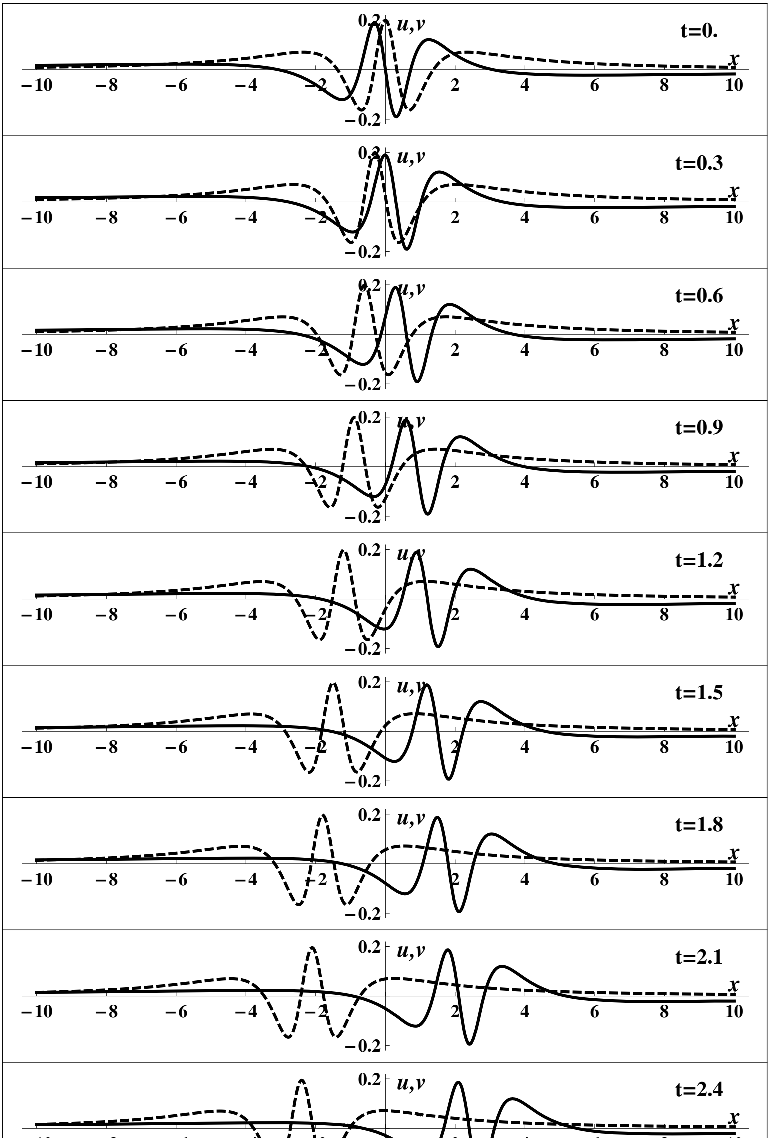

Рис.3

Библиографический список

1. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

2. *Quarteroni A.* Numerical models for differential problems. Milan, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. XIX, 656 p.

3. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2008. 352 с.

4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.

5. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с.

6. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Исследование нелинейных стохастических систем с применением языка ФОРМАК // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь, 1984. С. 105–111.

7. *Christov C.I.* A complete orthogonal system of functions in $L^2(-\infty, \infty)$ space // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1982. Vol. 42, № 6. P. 1337–1344.

8. *Higgins J.R.* Completeness and basis properties of sets of special functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1977. X, 134 p.

9. *Boyd J.P.* Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval // Journal of Computational Physics. 1987. Vol. 69, № 1. P. 112–142.

10. *Boyd J.P.* The orthogonal rational functions of Higgins and Christov and algebraically mapped Chebyshev polynomials // Journal of Approximation Theory. 1990. Vol. 61, № 1. P. 98–105.

11. *Качмарж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 507 с.

12. *Богуславский И.А.* Статистический анализ многомерных систем при использовании полиномов Эрмита многих переменных // Автоматика и телемеханика. 1969. № 7. С. 36–51.

13. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

14. *Полосков И.Е.* Системы аналитических вычислений. Общие сведения, структура и приложения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.Е. Полосков; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. 660 с.

15. *Mangano S.* Mathematica Cookbook. Sebastopol, Calif.: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

17. *Кудряшов Н.А., Рябов П.Н.* Свойства нелинейных волн в активно-диссипативной дисперсионной среде // Известия РАН. МЖГ. 2011. № 3. С. 97–105.

18. *Васильева О.А.* Численное исследование системы уравнений Карлемана // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 7–15.

19. *Годунов С.К., Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи математических наук. 1971. Т. 26, вып. 3 (159). С. 3–51.